数理解析研究所講究録
1537 巻 2007 年 81-93

複素力学系と C*-環

岡山大学・環境学研究科　梶原 毅 (Tsuyoshi Kajiwara)
Graduate School of Environmental Science
Okayama University

1　序と準備

本研究は全体として綿谷安男氏 (九州大学), また一部泉正己氏 (京都大学) との共同研究である. 本稿の前半は, 主として [5], 後半は主として [4] の内容を述べたものであり, 自己相似写像については, [6] の内容の一部である.

1.1　序

同相写像, また非可逆連続写像による力学系に対して, 標準的なやりかたで C*-環とよばれる代数を構成することができる. この方法は今まで多くの C*-環の例を提供してきたが, 一方もとの力学系を C*-環の代数構造との関係において考察する立場もある.

本稿では, 有理関数によって与えられる 1 次元リーマン球面上の (非可逆) 力学系に対して C*-環を構成し, 得られた環の性質を調べること, その環上の KMS state を分類し, それからもとの力学系の情報を復元することについて報告する. いくつかの例についても説明する.

複素力学系とそれから作られる C*-環の関係についてわかりやすく表すために, 次の対照表を作成した.

「複素力学系」と「C*-環」の対照表

複素力学系	C*-環
非可逆力学系	endomorphism から作られる C*-環
有限次被覆	finite index
有限次分岐被覆	not finite index
被覆の次数	Cuntz 環の生成元の数 (W*-的性質)
不変集合	イデアル構造
ジュリア集合	単純環
拡大性	純無限性
分岐構造	K-群 (W*では消える)
微分可能性、解析性	?

KMS state についての対照表

不変測度	KMS state
エルゴード性	KMS state の一意性
分岐点、例外点	離散的な KMS state

なお, サリバンによってクライン群と有理関数力学系との興味ある対応が呈示されており, サリバンの辞書と呼ばれている. これに関する作用素環からの研究は, 興味ある問題である.

1.2 ヒルベルト C*-双加群

C*-環は単位元をもつものとする. A を C*-環, X は C-linear space とする. $X \times X$ から A への写像 $(x|y)_A$ で次をみたすものを, A 値内積という.

1. $(x|y)_A = (y|x)_A^* \quad x, y \in X$.
2. $(x|x)_A \in A^+$ であり, $(x|x)_A = 0$ と $x = 0$ は同値.

これは, $A = \mathbf{C}$ の場合, すなわちヒルベルト (ユニタリ) 空間の一般化である. A 値内積を用いて X に $\|x\|_A = \|(x|x)_A\|^{1/2}$ でノルムを考えることができる.

X に A の右加群構造と, A 値内積 $(x|y)_A$ が定義されていて次を満たすとする.

1. $(x|ya)_A = (x|y)_A a \quad x, y \in X, \quad a \in A$.
2. $\{(x|y)_A \,|\, x, y \in X\}$ は A の稠密なイデアル.
3. X は $\|\cdot\|_A$ で完備である.

このとき, X をヒルベルト A 加群という.

Example 1.1. 1. $A = \mathbf{C}$, $X = \mathcal{H}$ (普通のヒルベルト空間)

2. A は単位元をもつ C*-環, α は A の自己同型とする. $X = A$ とし,

$$x \cdot a = x\alpha(a) \qquad (x|y)_A = \alpha^{-1}(x^* y)$$

と定義して X はヒルベルト C*-加群となる.

3. Σ を有限集合, $\mathcal{C}$ で $\Sigma\times\Sigma$ の部分集合で, 適当な条件をみたすとする. $A = \mathrm{C}(\Sigma)$, $X = \mathrm{C}(\mathcal{C})$ で, $f, g \in X$, $a, b \in A$ に対して,

$$(f \cdot b)(i,j) = a(i)f(i,j)b(j) \qquad (i,j) \in \mathcal{C}$$
$$(f|g)_A(j) = \sum_{i,\,(i,j)\in\mathcal{C}} \overline{f(i,j)}g(i,j) \qquad j \in \Sigma$$

としてヒルベルト C*-加群となる.

X 上の線形写像 T で, $(Tx|y)_A = (x|Sy)_A$ が任意の x, y に対して成り立つような $S(=T^*)$ が存在するようなもの全体を $\mathcal{L}(X_A)$ とかく. これは, C*-環である. x, y に対して

$$\theta_{x,y}z = x(y|z)_A$$

で, X 上の一階作用素を定義する. $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X)$ である. $\{\theta_{x,y} \,|\, x, y \in X\}$ によって $\mathcal{L}(X)$ の中で生成される C*-環を $K(X)$ とかき, コンパクト環という. $K(X)$ は $\mathcal{L}(X)$ の閉イデアルである. (1) の例では, ヒルベルト空間上のコンパクト作用素のなす環に一致する. (2) の例では, A 全体に一致する.

X がヒルベルト A 加群として, A から $\mathcal{L}(X)$ への準同型 ϕ があるとする. ここでは, ϕ は単射であり, A が単位元をもつ場合には $\phi(I) = I$ とする. X は左 A 加群となる. そのとき, X (と ϕ) を, ヒルベルト C*-双加群あるいはヒルベルト A-A 双加群 とよぶ.

Example 1.2. 1. $X = A$ の例. $\phi(a)x = ax$.

2. $X = \mathrm{C}(\mathcal{C})$ の例. $(\phi(a)f)(i,j) = a(i)f(i,j)$

などで, 左からの作用は通常自然に定義される. 多くの場合, 最初から左右の作用を定義して支障ない.

$I_X = \phi^{-1}(\phi(A) \cap K(X))$ は A のイデアルになり, コンパクトイデアルという. 一般には, I_X は A より小さくなり. 分岐点などの情報を表している. $K(X) = \mathcal{L}(X)$ のときは, I_X は A に必ず一致する.

1.3 Cuntz-Pimsner 環の構成

ヒルベルト C*-双加群から C*-環を構成する標準的な方法を説明する. この部分は, Pimsner [10] による. A を C*-環, X をヒルベルト C*-A-A 双加群とする. そのとき, $\{t_a \,|\, a \in A\}$, $\{t_x \,|\, x \in X\}$ で次の関係

$$t_a t_x = t_{\phi(a)x} \qquad a \in A,\ x \in X$$
$$t_x t_a = t_{xa} \qquad a \in A,\ x \in X$$
$$t_x^* t_y = t_{(x|y)_A} \qquad x, y \in X$$

をみたすものによって普遍的に生成される C*-環を Toeplitz 環とよび, $\mathcal{T}_X$ と書く. この環は 一般には大き過ぎるので, さらに割る必要がある.

Toeplitz 環の中に, $\theta_{x,y}$ が $t_x t_y^*$ として表現される. これによって与えられる $K(X)$ の表現を, $\phi^{(1)}$ とかく I_X の元 a は, t_a として, また $K(X)$ の元としても二通りに $\mathcal{T}_X$ の中に表現される. $\mathcal{T}_X$ をさらに関係式

$$t_a = \phi^{(1)}(a) \qquad a \in I_X$$

で割った環を $\mathcal{O}_X$ とかき, Cuntz-Pimsner 環といい, 主にこの C*-環が研究されている.

t_x, t_a の $\mathcal{O}_X$ における像を $\tilde{t}_x, \tilde{t}_a$ とかく. $t \in \mathbf{R}$ に対して, $\gamma_t(\tilde{t}_x) = e^{it}\tilde{t}_x$, $\gamma_t(\tilde{t}_a) = \tilde{t}_a$ により, 一次元トーラス $\mathbf{T}$ の $\mathcal{O}_X$ への作用 γ が定まる. これをゲージ作用という.

Example 1.3. Ω をコンパクト位相空間, θ で Ω の位相同型とする. $A = \mathrm{C}(\Omega)$, $X = \mathrm{C}(\Omega)$ で,

$$(a \cdot f \cdot b)(\omega) = a(\omega)f(\omega)(b(\theta^{-1}(\omega))$$
$$(f|g)_A = (\overline{f} \cdot g)(\theta(\omega))$$

として X を定義する. そのとき, $\mathcal{O}_X$ は, 従来からある C*-接合積である.

Example 1.4. $A = \mathbf{C}$, $X = \mathbf{C}^n$ で, A の左右作用は普通のスカラーの作用とし, X の A 内積は, 通常の内積とする. そのとき, $\mathcal{O}_X$ は, ヒルベルト空間上の n 個の作用素 $\{S_i\}_{i=1}^n$ で,

$$S_i^* S_i = I \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = I$$

を満たすもので生成される C*-環である. $\mathcal{O}_n$ とかく. これは, n 生成元の Cuntz 環と呼ばれ, 非常に重要なものである.

この環は, n 個の元のフルシフトでも作られる. 有理関数力学系は, Lyubich 測度についての測度零集合を除けば, フルシフトになることが示されている ([3]). つまり, 分岐点のない単純な n 被覆である. 位相をはぎ取って測度的 (W* 的) に考えると有理関数力学系は, すべてフルシフトになってしまう. 位相的に, すなわち C*-的に考えると, 分岐点の情報を K-群または KMS state のことばでつかまえることができる.

2 有理関数複素力学系からの C*-環の構成

$R(z)$ を 2 次以上の有理関数で, $\hat{\mathbf{C}}$ 上に R によって与えられる非可逆力学系を考える. これは, $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への有限次分岐被覆を与えている.

$\{R^n(z)\}_{n=0,\ldots}$ が同等連続であるような $z \in \hat{\mathbf{C}}$ 全体をファトウ集合とよび F_R とかく. $J_R = \hat{\mathbf{C}} \backslash F_J$ をジュリア集合と呼ぶ. ジュリア集合は閉集合 (従ってコンパクト集合) である. J_R と F_R は有理関数 R について完全不変である.

$w_0 = R(z_0)$ とする. z と w の適当な局所座標系のもとで,

$$R(z) = w_0 + a_N(z - z_0)^N + a_{N+1}(z - z_0)^{N+1} + \cdots \qquad (a_N \neq 0)$$

となるとき, $e_R = N$ とおき, z_0 における分岐指数という. $B_R = \{z \in \hat{\mathrm{C}} \mid e_R(z) \geq 2\}$ と置き, 分岐点集合という. E_R は, 逆軌道が有限集合になる点の集合である. E_R で R の例外点の集合を表す. $E_R \subset B_R$ である.

Proposition 1. *(Beardon [1] 参照) R が次数 2 以上の有理関数であるとき, E_R は高々 2 個であり, 次のように場合分けできる.*

1. $E_R = \phi$.
2. E_R は 1 個. このとき R は *Mobius* 変換によって多項式と共役.
3. E_R は 2 個. このとき R は *Mobius* 変換によって, $R(z) = z^N$ $(N \geq 2)$ と共役.
4. E_R は 2 個. このとき R は *Mobius* 変換によって, $R(z) = z^{-N}$ $(N \geq 2)$ と共役.

有理関数力学系に対して, ヒルベルト C*-双加群を構成しよう. R を $\hat{\mathrm{C}}$ から $\hat{\mathrm{C}}$ への写像と考える場合と, J_R から J_R への写像と考える場合のそれぞれに対して構成を行う.

$A = \mathrm{C}(\hat{\mathrm{C}})$ (可換 C*-環), $\mathcal{C} = \{(z, R(z) \mid z \in \hat{\mathrm{C}})\}$ として, $X_R = \mathrm{C}(\mathcal{C})$ とする. f, $g \in X_R$, a, $b \in A$ に対して,

$$(\phi(a)f \cdot b)(z, R(z)) = a(z)f(z)b(R(z))$$
$$(f|g)_A(z) = \sum_{w \in R^{-1}(z)} e_R(w)\overline{f(w)}g(w)$$

とする.

ジュリア集合 J_R に制限した構成も行う. $A_{J_R} = \mathrm{C}(J_R), \mathcal{C}_{J_R} = \{(z, R(z)) \mid z \in J_R\}$, $X_{J_R} = \mathrm{C}(\mathcal{C}_{J_R})$ に対して同じ式で, 左右加群構造, 内積を定義する.

Proposition 2. *上の式が X_R の両側 A 作用と A 値右内積を与え, X_R は ヒルベルト A-A 双加群になる.*

同様に, X_{R_J} はヒルベルト A_{J_R}-A_{J_R} 双加群になる.

内積の定義において $e_R(z)$ をかけていることにより, 連続関数になって A の元が定義される.

Proposition 3. *X_R に対して, $I_{X_R} = \{f \in \mathrm{C}(\hat{\mathrm{C}}) \mid f|_{B(R)} = 0\}$ である. X_{J_R} に対しては, $I_{X_{J_R}} = \{f \in \mathrm{C}(J_R) \mid f|_{B(R) \cap J_R} = 0\}$ である.*

$B(R) \cap J_R = \phi$ のときは, $I_K = A_{J_R}$ であり, これは, X_{J_R} が有限生成 (分岐のない被覆) になることと同値である.

この命題より, 分岐点の情報をヒルベルト C*-双加群のことばで表現することができる.

X_R, X_{J_R} に対して構成した Cuntz-Pimsner 環を それぞれ $\mathcal{O}_R$, $\mathcal{O}_{J_R}$ と書く.

C*-環が単純であるとは, ノルム位相で閉じている両側イデアルが自明なものに限ることである. ただし, 単位元を持つ場合は代数的にも単純になる. 単純で単位元をもつ C*-環 A が純無限とは, $A = \mathbf{C}$ ではなく, A の 0 でない任意の元 a に対して, x, $y \in A$ が存在して $xay = I$ となることである. C*-環 A が核型であるとは, 別の C*-環に対して, テンソル積 $A \otimes B$ の C*-ノルムが一意的になることであり, ある意味で有限次元環に近い状況を表す.

Theorem 4. *(Kajiwara-Watatani[5])* R が *2* 次以上の有理関数であるとき, $\mathcal{O}_{J_R}$ は常に単純かつ純無限である.

さらに, これらの C*-環は核型となる. これらに加えてもう一つの条件を満たすクラスの C*-環は, K 群の情報で完全に分類されることが知られている. (Kirchberg-Phillips)

証明のポイントになるのは以下の事実である.

1. 任意の開集合 (小さくても) U に対して, n が存在し, $R^n(U) = \hat{\mathbf{C}}$ となる.
2. J_R の任意の元 z に対して, 逆軌道 $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\{R^{-n}(z)\}$ は, J_R で稠密である. これは, 極小性と呼ばれる.
3. 任意の自然数の組 m, n に対して $\{z \in \hat{\mathbf{C}} \mid R^m(z) = R^n(z)\}$ は有限集合である. これは本質的自由性条件である.

これらを用いて $z \in \mathcal{O}_{J_R}$ に対して, $a, b \in \mathcal{O}_{J_R}$ が取れて, $azb = I$ となり, 単純であること, 純無限であることの両方が示される.

なお, $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbf{Z}/(n-1)\mathbf{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_n) = \{0\}$ である.

Example 2.1. 例 1. $R(z) = z^n$ $(n \geq 2)$. このとき, $J_R = S^1$ (絶対値 1 の円周) となる. ジュリア集合は, 分岐点を含まず、X_{J_R} は有限生成. n-times arrount embedding を表す. $K_0(\mathcal{O}_{J_R}) = \mathbf{Z}/(n-1)\mathbf{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_{J_R}) = \mathbf{Z}$ となる.

Example 2.2. $R(z) = T_n(z)$ $(n \geq 2)$. ただし, T_n は n 次のチェビシェフ多項式. $J_{T_n} = [-1, 1]$ であり, J_{T_n} は, $n-1$ 個の分岐点を含む. $K_0(\mathcal{O}_{T_n}) = \mathbf{Z}^{n-2}$, $K_1(\mathcal{O}_{T_n}) = \{0\}$ となる.

特に $n = 2$ の場合は, $[0, 1]$ 上のテント写像と位相共役である.

次数が 2 以上の多項式 P でジュリア集合が $[-1, 1]$ となるなら, $P = \pm T_n$ である.

Example 2.3. $R(z) = z^2 + C$ (2 次式). C が Mandelbrot 集合の外部にあれば, J_R は完全不連結で, $\mathcal{O}_{J_R}$ は, Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ と同型である. C が主カージオイドの内部のときは, $J_R = S^1$ で, $R(z)$ は, ジュリア集合上で, $R(z) = z^2$ と共役である. 従って, 両方の場合の $\mathcal{O}_{R_J}$ は同型ではない.

Example 2.4. R は d 次以上 $(d \geq 2)$ の有理関数で, z_0 が R の吸引的な固定点とする. もし R の全ての分岐点が z_0 の直接吸引鉢に含まれるなら, $\mathcal{O}_{J_R}$ は Cutz 環 $\mathcal{O}_d$ と同型である.

Example 2.5. $R(z) = (z^2+1)^2/(4z(z^2-1))$. そのとき $J_R = \hat{\mathbb{C}}$ であり, 6 個の分岐点を含む. K 群については次の完全系列が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{id-[X]} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{O}_R) \\
{\scriptstyle \delta_1}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_0} \\
K_1(\mathcal{O}_R) & \underset{i_*}{\longleftarrow} & 0 & \underset{id-[X]}{\longleftarrow} & \mathbb{Z}^5
\end{array}$$

Deaconu-Muhly [2] が以前に同じ例に対して, C*-環を構成した. ただし, 彼らが構成した C*-環は単純にならず, K-群も我々の構成とは異なる.

Example 2.6. (Ushiki [11]) $R(z) = (z^3 - 16/27)/z$. J_R は Sierpinski gasket と位相同型である. このとき R の逆をなす 3 個の分枝は Sierpinski gasket 上の自己相似写像の組を与えるが, $\mathcal{O}_{R_J}$ は通常の自己相似写像によって構成した C*-環と同型ではない. K 群については,

$$\begin{array}{ccccc}
\{0\} & \xrightarrow{id-[X]} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{O}_R) \\
{\scriptstyle \delta_1}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_0} \\
K_1(\mathcal{O}_R) & \underset{i_*}{\longleftarrow} & \mathbb{Z}^\infty & \underset{id-[X]}{\longleftarrow} & K_1(I_{X_R})
\end{array}$$

となり, $K_0(\mathcal{O}_R)$ が torsion free な元を含む.

最後の例は, 自己相似写像によっても与えることができる. 自己相似写像に関する結果の詳細は, Kajiwara-Watatani [6] を参照. 真の縮小写像の組 $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$ がコンパクト集合 Ω 上の縮小写像となっているとする. すなわち,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i(\Omega)$$

とする. このとき逆に Ω を γ から決まる自己相似集合という. $A = C(\Omega)$, $\mathcal{C} = \cup_j\{(\gamma_j(y), y) \mid y \in \Omega\}$, $X_\gamma = C(\mathcal{C})$ として,

$$(\phi(a)\cdot f\cdot b)(\gamma_j(y), y) = a(\gamma_j(y))f(\gamma_j(y), y)b(y)$$

$$(f|g)_A = \sum_{j=1}^{N} \overline{f(\gamma_j(y), y)}g(\gamma_j(y), y)$$

で X_γ はヒルベルト A-A 双加群になる. $\mathcal{O}_\gamma$ で X_γ から作られる Cuntz-Pimsner 環を表す. 若干の仮定のもとで, これに対しても有理関数力学系の場合と同じ結論が言える ([6]).

$\mathbb{R}^2$ の 3 頂点が $P = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $Q = (0, 0)$, $R = (1, 0)$ となるような正三角形の上に 3 つの縮小写像 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を

$$\gamma_1(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad \gamma_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad \gamma_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

で定義する. Sierpinski gasket はこれらから決まる自己相似集合だが, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ はある一つの写像の逆分枝にならない. また, $\mathcal{O}_\gamma$ は $\mathcal{O}_3$ であり, $K_0(\mathcal{O}_3)$ は torsion free な元を持たない.

そこで, $\tilde{\gamma_1} = \gamma_1$, $\tilde{\gamma_2} = \alpha_{-\frac{2\pi}{3}} \circ \gamma_2$, $\tilde{\gamma_3} = \alpha_{\frac{2\pi}{3}} \circ \gamma_3$ とおく. ただし, α_θ は角度 θ の回転である. そのとき, $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}, \tilde{\gamma_3}$ は写像 $h: K \to K$ の逆分枝であり, R と共役である. すなわち, Sierpinski gasket に関連して作られるふたつの C*-環, $\mathcal{O}_3$ と $\mathcal{O}_R$ は同型でない.

3 有理関数力学系から作られる C*-環上の KMS state の分類

A を C*-環とし, α を 1 次元トーラス群 $\mathbb{T}$ の A への作用とする. m を整数として, $A^{(m)} = \{a \in A \mid \alpha_t(a) = e^{imt}a\}$ とおく. これを α のスペクトル部分空間と呼ぶ.

A の state φ が α に関する β-KMS state であるとは,

$$\varphi(ab) = e^{m\beta}\varphi(ba)$$

$a \in A$, $b \in A^{(m)}$ ($\forall m \in \mathbf{Z}$) がなりたつことである. $\beta > 0$ なら φ は自動的に α 不変になる. $\beta = 0$ のときは, α 不変な tracial state(ノルムが 1 の trace) を β-KMS state と呼ぶ. β-KMS state 全体の集合は, 凸閉集合になり, 端点 (extreme point) を求めることが重要な問題である.

この節では, 2 次以上の有理関数 R に対して, $\mathcal{O}_R$ のゲージ作用 γ に関する β-KMS state の分類を行う.

$f \in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して,

$$\tilde{f}(z) = \sum_{w \in R^{-1}(z)} f(w)$$

とおく. R は必ず分岐点をもつので, $\tilde{f}$ は不連続関数である. $\hat{\mathbb{C}}$ のボレル測度 μ に対して,

$$F(\mu)(f) = \mu(\tilde{f})$$

によって $C(\hat{\mathbb{C}})^*$ 上の "Perron-Frobenius type" 作用素 F を定義する.
$\hat{\mathbb{C}}$ 上の点測度 δ_w に対して,

$$F(\delta_w) = \sum_{w \in R^{-j}(z)} \delta_w$$

であることに注意しよう.
Cuntz-Pimsner 環についての KMS state の一般論 (Laca-Neshveyev [8]), および複素力学系から作られるヒルベルト C*-加群の基底の構成により, 次がわかる.

Proposition 5. *$\mathcal{O}_R$ のゲージ作用 γ に関する β-KMS state は, $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度で次の (K1), (K2) を満たすものと対応する.*

$$\begin{aligned} &(K1) \qquad F(\mu)(f) = e^{\beta}\mu(f) \qquad f|_{B(R)} = 0 \\ &(K2) \qquad F(\mu)(f) \le e^{\beta}\mu(f) \qquad f \in C(\hat{\mathbb{C}})^+ \end{aligned}$$

これより, β-KMS-state の制限によって得られる C($\hat{\mathbb{C}}$) 上のボレル測度の点密度について, 次が得られる.

Proposition 6. *μ が Proposition (5) の (K1), (K2) をみたすとする. そのとき, 点密度について μ は次をみたす.*

$$\begin{aligned} \mu(\{R(w)\}) &= e^{\beta}\mu(\{w\}) \qquad w \notin B(R) \\ \mu(\{R(w)\}) &\le e^{\beta}\mu(\{w\}) \qquad w \in \hat{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_R$ の KMS state の分類において, 次の命題が本質的である.

Proposition 7. *$\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度 μ がある z において点密度をもち, $z \notin E(R)$ なら, $\beta > \log N$ である.*

$F_\beta = e^{-\beta}F$ とおく. w を分岐点として, $\beta > \log N$ のとき, $\hat{\mathbf{C}}$ 上のボレル確率測度 $\mu_{\beta,w}$ を,

$$\mu_{\beta,w} = m_{\beta,w}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\beta} \sum_{z\in R^{-k}(w)} \delta_z$$
$$= m_{\beta,w}\sum_{k=0}^{\infty} {F_\beta}^k(\delta_z)$$

とする. ここで, $m_{\beta,w}$ は正規化定数である. さらに, w が例外点のときは, $0 < \beta \leq \log N$ に対しても同じ式で定義することができる.

Proposition 8. *$\mu_{\beta,w}$ は Proposition 5 の条件を満たし, $\mathcal{O}_R$ の β-KMS state $\varphi_{\beta,w}$ に一意的に拡張される.*

μ が β-KMS state に対応する $\hat{\mathbf{C}}$ の測度とする. $\beta > \log N$ のときは,

$$\mu - F_\beta(\mu) = \mu_0$$

を考えると, (K1) により μ_0 は I_X で 0 になり, μ_0 は $A/I_X = C(B(R))$ の測度である. 上の式より,

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty}(F_\beta)^j(\mu_0)$$

とかける. $\beta > \log N$ であれば右辺は絶対収束する.

Proposition 9. *$\beta > \log N$ のとき, β-KMS state は, $\{\varphi_{\beta,b} \,|\, b \in B(R)\}$ の一次結合でかける. さらに, これらは端点である.*

$\mathcal{O}_R$ の KMS state の条件をみたす $C(\hat{\mathbf{C}})$ 上の別のタイプのボレル確率測度としては, Lyubich μ_L 測度 ([9]) が考えられる.

Proposition 10. *Lyubich 測度 μ_L は Proposition (5) (K1), (K2) を満たし, $\beta = \log N$ に対して β-KMS state φ^L を与える.*

Lyubich 測度が点密度を持たないことより, (K1) が全ての $f \in C(\hat{\mathbf{C}})$ に対して従うことが示される. (K2) はそれから従う.

$\beta \leq \log N$ のときは, 例外点から生じる離散的測度を引き去った測度を μ とすると, 点密度がなくなり, そのときは (K1) が全ての a に対してなりたつ. $a = 1$ とすると $\tilde{a}(x) = N$ が μ a.e. x に対してなりたち, $\beta = \log N$ なら $\mu = \mu^L$ であり, $\beta < \log N$ なら $\mu = 0$ がわかる.

$0 < \beta$ として, β-KMS state の分類定理を述べる.

Theorem 11. *(Izumi-Kajiwara-Watatani[4])* R を2次以上の有理関数とする. $0 < \beta$ とする. $\mathcal{O}_R$ の *extreme β-KMS state* は次のように分類される.

1. R が例外点を持たない場合. $0 < \beta < \log N$ のときは, *β-KMS state* はない. $\beta = \log N$ のときは, φ^L が唯一つの *β-KMS state* であり, $\log N < \beta$ のときは, $\{\varphi_{\beta,z} \,|\, z \in B(R)\}$ である.

2. R が例外点を持つときは, $\log N < \beta$ の場合は例外点を持たない場合と同じである. $0 < \beta < \log N$ の場合には, $\{\varphi_{\beta,z} \,|\, z \in E(R)\}$ であり, $\beta = \log N$ のときは, $\{\varphi_L, \varphi_{\beta,z} \,|\, z \in E(R)\}$ である.

$\beta = 0$ のときには, β-KMS state を γ-不変なトレースと解釈する. そのとき, 次がなりたつ.

Proposition 12. *1.* $E_R = \{w\}$ のとき. 唯一つの γ 不変トレースが存在する.

2. $E_R = \{w_1, w_2\}$ で $R(w_i) = R(w_i)$ のとき. 2個の γ 不変トレース φ_{w_i} で, $C(\hat{\mathbb{C}})$ への制限が, δ_{w_i} となるものがある.

3. $E_R = \{w_1, w_2\}$ で $R(w_1) = w_2$, $R(w_2) = R(w_1)$ のとき. 唯一つの γ-不変トレース φ で, $C(\hat{\mathbb{C}})$ への制限が $(\delta_{w_1} + \delta_{w_2})/2$ になるものがある.

以下の例は, 例外点を持つ場合に, $\mathcal{O}_R$ に対して, β の値に対して extreme KMS state の分類を述べたものである.

Example 3.1. $R(z) = z^n$ $(n \geq 2)$. $E_R = \{0, \infty\} = B(R)$ で $R(0) = 0$, $R(\infty) = \infty$ となる. このとき $\mu_{\beta,w} = \delta_w$ となる. $\beta \neq \log N$ のときは, $\mu_{\beta,w}$ に対応する $\varphi_{\beta,w}$ のみであり, $\beta = \log N$ のときは, それに加えて φ^L も存在する.

Example 3.2. $R(z) = z^{-n}$ $(n \geq 2)$. $E_R = \{0, \infty\} = B(R)$ で $R(0) = \infty$, $R(\infty) = R(0)$ である. $\beta \geq 0$ に対して,

$$\mu_{\beta,0} = \frac{e^\beta}{e^\beta + 1}\delta_0 + \frac{1}{e^\beta + 1}\delta_\infty, \qquad \mu_{\beta,\infty} = \frac{1}{e^\beta + 1}\delta_0 + \frac{e^\beta}{e^\beta + 1}\delta_\infty$$

となる. $\beta \neq \log N$ のときは, $\mu_{\beta,w}$ に対応する $\varphi_{\beta,w}$ のみであり, $\beta = \log N$ のときは, それに加えて φ^L も存在する. なお, $\beta \to +0$ のときは2つの例外点に対応する KMS state は1点に退化することがわかる.

Example 3.3. $R(z) = z^n - 2z + 1$ $(n \geq 2)$. 有限な分岐点は1個で, 0である. $0 \leq \beta < \log n$ のときは, $\varphi_{\beta,\infty}$ だけ, $\beta = \log n$ のときは, $\varphi_{\beta,\infty}$, φ^L であり, $\beta > \log n$ のときは, $\varphi_{\beta,0}$, $\varphi_{\beta,\infty}$ である.

ジュリア集合が例外点を含まないことより, $\mathcal{O}_{J_R}$ では次が成り立つ.

Theorem 13. *(Izumi-Kajiwara-Watatani[4])* $\mathcal{O}_{J_R}$ のゲージ作用に α に対して, 次がなりたつ.

1. $0 < \beta < \log N$ のときは, β-*KMS state* はない.

2. $\beta = \log N$ のときは, *Lyubich* 測度に対応する φ^L のみ存在する.

3. $\log N < \beta$ のときには, $\{\varphi_{\beta,w} \mid w \in B(R) \cup J_R\}$ が β-*KMS state* の端点である.

Corollary 14. R を有理関数とし, J_R が R の分岐点を含まないとすると, $\mathcal{O}_R$ のゲージ作用に関する β-*KMS state* は $\beta = \deg R$ のときにのみ存在し, *Lyubich* 測度によって与えられるものである.

以下は, $\mathcal{O}_{J_R}$ 上の KMS state の例である.

Example 3.4. $R(z) = z^2$ とする. そのとき, $\beta = 2$ のときのみ β-KMS state が存在し, S^1 のルベーグ測度によって与えられるものである.

Example 3.5. $R(z) = 2z^2 - 1$ とする. β-KMS state は, $\beta \geq 2$ のときにのみ存在する. $\beta = 2$ のときは, $[-1, 1]$ 上の Lebesgue 測度によって与えられる. $\beta > 2$ のときは, $[-1, 1]$ 上の測度

$$\mu_{\beta,0} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\beta} \delta_{R^{-i}(0)}$$

によって与えられる.

$z = 0$ においてエルゴード性が崩れていると考えることができる.

Example 3.6. $R(z) = (z^2 + 1)^2/(4z(z^2 - 1))$. $\beta = \log 4$ のときには, $\hat{\mathbb{C}}$ 全体にサポートをもつ Lyubich 測度によって与えられる. $\beta > \log 4$ のときは, 6 個の分岐点のそれぞれに対して extreme KMS state が現れる.

Example 3.7. (Ushiki [11]) $R(z) = (z^3 - 16/27)/z$. $\beta = \log 3$ のときは, Sierpinski gasket の自己相似集合としての Huchinson 測度によって $\beta - KMS$ state が与えられる. $\beta > \log 3$ のときは, 外側の 3 角形の中点 b_1, b_2, b_3 によって β-KMS state が与えられる.

複素力学系から作られる C*-環 $\mathcal{O}_R$ 上の extreme KMS state から作られる GNS 表現が生成するフォンノイマン環の型については, 次のことがわかる.

Theorem 15. *(Izumi-Kajiwara-Watatani([4])*

1. φ^L の場合は, $III_{1/N}$ 型因子環である. ただし, N は R の次数である.

2. $\varphi_{\beta,w}$ の場合は，すべて I 型因子環である．

なお，φ^L の場合の証明は，[3] を用いて φ^L で与えられる GNS 表現の値域の W* 閉包の中に，N 生成元の Cuntz 環を構成できることで与えられる，このことは，最初に述べたように，W* 的に考えると単純な N 被覆の場合と同じになってしまうことを意味している．

References

[1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions* GTM 132, 1991, Springer New York.

[2] V. Deaconu and M. Muhly, *C^*-algebras associated with branched coverings*, Proc. AMS. **129** (2001), 1077-1086.

[3] D. Heicklen and C. Hoffman, *Rational maps are d-adic Bernoulli*, Ann. of Math. **156** (2002), 103-114.

[4] M. Izumi, T. Kajiwara and Watatani Y., *KMS states and branched points*, preprint 2006 [arXiv : math.OA/0603592]

[5] T. Kajiwara T. and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with complex dynamical systems,* Indiana Math. J. **54** (2005), 755-778.

[6] T. Kajiwara and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with self-similar sets,* J. Operator Theory, 56(2006), 225-247

[7] T. Kajiwara and Y. Watatani, *KMS states on C^*-algebras associated with self-similar sets,* Preprint math.OA/0405514.

[8] M. Laca and S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras,* J. Funct. Anal. **211** (2004) 457–482.

[9] M. Yu. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 351-385.

[10] M. Pimsner, *A class of C^*-algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed product by $\mathbb{Z}$,* Free probability theory, AMS, (1997), 189–212.

[11] S. Ushiki, *Julia sets with polynomial symmetries,* Proc, Int. Conf. on Dynamical systems and Related Topics, World Scientific, 1991.